07.12.2018

Adı Soyadı :

Öğrenci Numarası :

MAT 101 ANALİZ I DERSİ QUİZ 3

1) **Stolz teoremini ifade ediniz. Bu teoremi kullanarak**

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+2+3+...+n}{5n^2}\right)$$

limitini bulunuz.

2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ **ve** $r \in \mathbb{R}$ **olmak üzere, dizinin yakınsaklık tanımını kullanarak**

a) $\lim\limits_{n\to\infty} r.a_n = r.a$ **b)** $r \neq 0$ ise $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{r} = \frac{a}{r}$

olduğunu gösteriniz.

3) **a)** $a_n = (-1)^n \left(\frac{1}{3}\right)^n$ **olmak üzere** $(|a_n|)$ **dizisinin limitini bulunuz.**

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n-\sqrt{4n^2-1}}{\sqrt{n^2+3}-n}$ **limitini bulunuz.**

4) $a_1 = 1$ **ve her** $n \in \mathbb{N}$ **için** $a_{n+1} = \frac{3a_n+4}{2a_n+3}$ **şeklinde tanımlı** (a_n) **dizisinin yakınsaklığını inceleyiniz.**

Not : Süre 45 dakikadır. Her soru eşit puanlıdır. Başarılar dileriz.

B. Sağır Duyar, İ. Eryılmaz

MAT101 ANALİZ I QUİZ 3 SINAVI ÇÖZÜMLERİ

① Stolz Teoremini ifade ediniz.

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2+\cdots+n}{5n^2} = ?$

Çözüm: $U_n = 1+2+\cdots+n$, $V_n = 5n^2$

$\lim\limits_{n\to\infty} V_n = \lim\limits_{n\to\infty} 5n^2 = +\infty$, (V_n) artan bir dizi,

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}-U_n}{V_{n+1}-V_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+2+\cdots+n+n+1-(1+2+\cdots+n)}{5(n+1)^2-5n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{10n+5} = \frac{1}{10}$$

Stolz Teoremine göre

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{U_n}{V_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+2+\cdots+n}{5n^2} = \frac{1}{10}$$ dir.

② $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $r\in\mathbb{R}$ olmak üzere

a) $\lim\limits_{n\to\infty} r.a_n = r.a$, b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{r} = \dfrac{a}{r}$ $(r\neq 0)$ old. göst.

Çözüm: Herhangi $\varepsilon>0$ sayısı verilsin.

a) $a_n\to a\ (n\to\infty)$ old. $\exists N\in\mathbb{N}$: $\forall n>N$ için $|a_n-a| < \varepsilon/|r|$ dir.

$\forall n>N$ için $|r.a_n - r.a| = |r.(a_n-a)| = |r|.|a_n-a|$

$< |r|.\varepsilon/|r| = \varepsilon$

olur ki bu $ra_n \to ra\ (n\to\infty)$ demektir.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ olduğundan verilen her $\varepsilon>0$ sayısına karşılık $|a_n-a| < \varepsilon.|r|$ olacak şekilde $N\in\mathbb{N}$ vardır.

her $n>N$ olduğunda $|a_n-a| < \varepsilon.|r|$

$\forall n>N$ için $\left|\dfrac{a_n}{r}-\dfrac{a}{r}\right| = \left|\dfrac{1}{r}(a_n-a)\right| = \dfrac{1}{|r|}.|a_n-a| < \dfrac{1}{|r|}.\varepsilon.|r| = \varepsilon$

olur ki bu $\dfrac{a_n}{r}\to\dfrac{a}{r}\ (n\to\infty)$ demektir. $(r\neq 0)$

③ a) $a_n = (-1)^n.\left(\frac{1}{3}\right)^n$ o.ü, $(|a_n|)$ dizisinin limitini bulunuz.

Çözüm: $a_n = (-1)^n.\left(\frac{1}{3}\right)^n \Rightarrow |a_n| = |(-1)^n|.\left|\left(\frac{1}{3}\right)^n\right| = \frac{1}{3^n}$

$\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ dır.

③ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n-\sqrt{4n^2-1}}{\sqrt{n^2+3}-n}$ limitini bulunuz.

Çözüm:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n-\sqrt{4n^2-1}}{\sqrt{n^2+3}-n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n-\sqrt{4n^2-1})\cdot(2n+\sqrt{4n^2-1})(\sqrt{n^2+3}+n)}{(\sqrt{n^2+3}-n)\cdot(\sqrt{n^2+3}+n)\cdot(2n+\sqrt{4n^2-1})}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+3}+n}{3\cdot(2n+\sqrt{4n^2-1})} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(1+\sqrt{\frac{3}{n^2}+1}\right)}{3n\left(2+\sqrt{4-\frac{1}{n^2}}\right)} = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{4} = \frac{1}{6}$$

bulunur.

4) $a_1 = 1$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $a_{n+1} = \dfrac{3a_n+4}{2a_n+3}$ olsun.

(i) (a_n) artan mı? azalan mı?

$\cdots a_n < a_{n+1} < a_{n+2} \cdots$ için

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{3a_{n+1}+4}{2a_{n+1}+3}\cdot\frac{2a_n+3}{3a_n+4} = \frac{6a_n\cdot a_{n+1}+12+8a_n+9a_{n+1}}{6a_n\cdot a_{n+1}+12+9a_n+8a_{n+1}}$$

$$= \frac{6a_n\cdot a_{n+1}+12+8a_n+9a_{n+1}}{6a_na_{n+1}+12+8a_n+a_n+8a_{n+1}} > 1 \text{ old. dan}$$

(a_n) artandır. Yine $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$a_{n+1} = \frac{3a_n+4}{2a_n+3} = \frac{3}{2}+\frac{7/4}{2a_n+3} < \frac{3}{2}+\frac{7/4}{5} = \frac{37}{20}$$

old. dan üstten sınırlıdır. O zaman ilgili teo. gereği $a_n \to \sup(a_n) = L$ olur. Yine $(a_{n+1}) \subset (a_n)$ içinde $a_{n+1} \to L$ olması kullanılırsa

$a_{n+1} = \dfrac{3a_n+4}{2a_n+3}$ ifadesinin her iki tarafının $n\to\infty$

limiti alındığında $L = \dfrac{3L+4}{2L+3} \Rightarrow 2L^2=4 \Rightarrow$

$L=\mp\sqrt{2}$ olur. $\forall n\geq 1$ için $a_n\geq 1$ old. dan

$L=\sqrt{2}$ olmalıdır.

$\therefore\ a_n \longrightarrow \sup(a_n)=\sqrt{2}$ dir.